

Universidad Nacional Autónoma de México

FES Acatlán

Geometría Analítica

Profesora Mayra Díaz

Equipo 6

Monroy Castillo Mónica Gabriela

Barrera Hernandez Daniel

Corona Ortega Javier

Martínez Sosa Tania Guadalupe

Pérez Arreola Estefani Veronica

June 4, 2015

1 Intersección de planos

El plano y sus diferentes ecuaciones.

1.1 Definición:

El conjunto de puntos de \mathbb{R}^3 \mathcal{P} , tal que $\exists P_0 \in \mathbb{R}^3$ y dos vectores $\vec{a}, \vec{b} \in V_3$ No nulos y linealmente independientes tales que

$$\mathcal{P} = \left\{ P \mid P = P_0 + u\vec{a} + v\vec{b}, u, v \in \mathbb{R} \right\}$$

lo cual se conoce como Ecuación vectorial estandar del plano, de las que se desprenden las Ecuaciones paramétricas:

$$(x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + u(a_1, a_2, a_3) + v(b_1, b_2, b_3)$$

$$x = x_0 + ua_1 + vb_1$$

$$y = y_0 + ua_2 + vb_2$$

$$z = z_0 + ua_3 + vb_3$$

Sean $\vec{n} = \vec{a} \times \vec{b}$ un vector normal (ortogonal) al plano \mathcal{P}

como $\vec{n} \perp \vec{a}$ y $\vec{n} \perp \vec{b}$,

$$\vec{n} \perp (p - p_0),$$

donde $p \in \mathcal{P}$:

$$\vec{n} \cdot (p - p_0) = 0$$

haciendo $\vec{n} = (A, B, C)$

$$(A, B, C) \cdot (x - x_0, y - y_0, z - z_0) = 0$$

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0 \text{ Ecuación Cartesiana Implícita}$$

$$Ax + By + Cz - Ax_0 - By_0 - Cz_0 = 0$$

Sea $D = -Ax_0 - By_0 - Cz_0$ entonces el plano tiene la ecuación:

$Ax + By + Cz + D = 0$ Ecuación Cartesiana General

$Ax + By + Cz = -D$

$\frac{Ax}{-D} + \frac{By}{-D} + \frac{Cz}{-D} = 1$

$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$ Ecuación Canónica.

donde $(a, 0, 0)$, $(0, b, 0)$ y $(0, 0, c)$ son las intersecciones del plano con los ejes coordenados X, Y, Z respectivamente.

1.2 Definición:

La traza de una superficie es la intersección de la superficie con los planos coordenados XY, YZ, XZ

En el caso de un plano, sus trazas son rectas definidas por dos ecuaciones :

De la ecuación cartesiana general:

Si $x = 0$, $By + Cz = -D$ (la traza en YZ)

Si $y = 0$, $Ax + Cz = -D$ (la traza en XZ)

Si $z = 0$, $Ax + By = -D$ (la traza en XY)

1.3 Lema 1.

Si \vec{n} es un vector normal al plano

$\mathcal{P} = \{P | P = P_0 + u\vec{a} + v\vec{b}, u, v \in \mathbb{R}\}$ y $p_1, p_2 \in \mathcal{R}$, entonces

$p_2 - p_1$ es ortogonal a \vec{n}

Demostración.

Si $p_1, p_2 \in \mathcal{P}$ entonces

$p_1 = P_0 + u_1\vec{a} + v_1\vec{b}$

$p_2 = P_0 + u_2\vec{a} + v_2\vec{b}$

para algunos $u_1, u_2, v_1, v_2 \in \mathbb{R}$

De donde se sigue que $p_2 - p_1 = (u_2 - u_1)\vec{a} + (v_2 - v_1)\vec{b}$

como \vec{n} es normal al plano, es ortogonal tanto a \vec{a} , como a \vec{b}

$\vec{n} \cdot (p_2 - p_1) = (u_2 - u_1)\vec{n} \cdot \vec{a} + (v_2 - v_1)\vec{n} \cdot \vec{b} = 0$

$\therefore (p_2 - p_1) \perp \vec{n}$

1.4 Lema 2.

Si \vec{n} es un vector normal al plano

$\mathcal{P} = \{P | P = P_0 + u\vec{a} + v\vec{b}, u, v \in \mathbb{R}\}$ y $p - p_0 \perp \vec{n}$, entonces $p \in \mathcal{P}$

Deostración.

Como $\vec{n} \perp \vec{a}$ y $\vec{n} \perp \vec{b}$

$\vec{n} = r(\vec{a} \times \vec{b}), r \in \mathbb{R}$ siempre que $r \neq 0$

además, $(p - p_0) \cdot \vec{n} = 0$

$(p - p_0) \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = 0$

es decir, $p - p_0$, \vec{a} y \vec{b} son, en su conjunto, linealmente dependientes

Como \vec{a} y \vec{b} son linealmente independientes, *existen* $u, v \in \mathbb{R}$ distintos de cero tales que $p - p_0$ es una combinación lineal de \vec{a} y de \vec{b} :

$$\begin{aligned} p - p_0 &= u\vec{a} + v\vec{b} \\ P &= P_0 + u\vec{a} + v\vec{b} \\ \therefore p &\in \mathcal{P} \end{aligned}$$

1.5 Teorema.

Si \vec{n} es una normal al plano $\mathcal{P} = \{P | P = P_0 + u\vec{a} + v\vec{b}, u, v \in \mathbb{R}\}$
 entonces
 $\mathcal{P} = \{\vec{n} \cdot (P - P_0) = 0\}$
 y \mathcal{P} es el único plano, que contiene a P_0 y tiene a \vec{n} como normal.

Demostración.

Sea $\mathcal{S} = \{\vec{n} \cdot (P - P_0) = 0\}$. Deseamos probar que $\mathcal{S} = \mathcal{P}$

Por el lema 1 , si $p \in \mathcal{P}$ entonces $p - p_0$ es ortogonal a \vec{n}

$$\vec{n} \cdot (p - p_0) = 0,$$

es decir, $p \in \mathcal{S}$ y $\mathcal{P} \subset \mathcal{S}$

Por otra parte , si $p \in \mathcal{S}$, por el lema 2 , se tiene que $p \in \mathcal{P}$

, es decir $\mathcal{S} \subset \mathcal{P}$

como $\mathcal{P} \subset \mathcal{S}$ y $\mathcal{S} \subset \mathcal{P}$, $\mathcal{P} = \mathcal{S}$

Ahora supongamos que existe otro plano que pasa por P_0 y con normal \vec{n}

$$\mathcal{P}' = \{P | P = P'_0 + s\vec{c} + t\vec{d}, s, t \in \mathbb{R}\}$$

Acabamos de probar que \mathcal{P}' puede escribirse como:

$$\mathcal{P}' = \{\vec{n} \cdot (P - P'_0) = 0\}$$

si $p_0 \in \mathcal{P}'$, entonces

$$\vec{n} \cdot (P - P'_0) = 0$$

$$\vec{n} \cdot P_0 - \vec{n} \cdot P'_0 = 0$$

$$\vec{n} \cdot P_0 = \vec{n} \cdot P'_0 \quad \forall P'_0 \in \mathbb{R}^3$$

Esto significa que $\vec{n} \cdot (P - P_0) = \vec{n} \cdot (P - P'_0)$

y en particular cuando $\vec{n} \cdot (P - P'_0) = 0$ se tiene que la ecuación de un plano

$$\mathcal{P}' = \{\vec{n} \cdot (P - P'_0) = 0\} = \{\vec{n} \cdot (P - P_0) = 0\} = \mathcal{P}$$

$$\therefore \mathcal{P}' = \mathcal{P}$$

1.6 Teorema.

Para todo vector no nulo $\vec{n} \in V_3$ y todo punto $p_0 \in \mathbb{R}^3$,

$\vec{n} \cdot (P - P'_0) = 0$ es la ecuación de un plano \mathcal{P} tal que

$$p_0 \in \mathcal{P} \text{ y } \vec{n} \perp \mathcal{P}$$

Demostración.

Sea $\mathcal{S} = \{\vec{n} \cdot (P - P_0) = 0\}$

Basta con mostrar que siempre existen dos vectores \vec{a} y \vec{b} linealmente independientes y ortogonales a \vec{n} tales que

$$\mathcal{P} = \{P | P = P_0 + u\vec{a} + v\vec{b}, u, v \in \mathbb{R}\}$$

ya que por el Teorema anterior $\mathcal{S} = \mathcal{P}$

Sean $\vec{n} = (n_1, n_2, n_3)$ donde $\vec{n} \neq \vec{0}$
 esto implica que al menos uno de los elementos de la terna de \vec{n} es distinto de cero.

Supongamos que $n_1 \neq 0$. Entonces existe un vector \vec{a} tal que

$$\vec{a} = (-n_2, n_1, 0)$$

es decir un \vec{a} no nulo y ortogonal a \vec{n} .

Como \vec{a} y \vec{n} son linealmente independientes, existe \vec{b}

$$\vec{b} = \vec{a} \times \vec{n} \neq \vec{0}$$

tal que $\vec{b} \neq \vec{0}$ y $\vec{b} \perp \vec{n}$, $\vec{b} \perp \vec{a}$

Esto significa que \vec{a} y \vec{b} son linealmente independientes y ortogonales a \vec{n} y esto siempre existe como se deseaba comprobar.

2 Distancia de un punto a un plano

Sea p_0 un punto en el plano \mathcal{P} con normal \vec{n} y Q un punto que no pertenece a \mathcal{P}

2.1 Definición:

La distancia de un punto Q a un plano \mathcal{P} con normal \vec{n} , $d(Q, \mathcal{P})$, es la longitud del segmento dirigido con punto inicial en el plano y punto final, el el punto Q .

$$dist2d(Q, \mathcal{P}) := (Proy(\vec{n}, (Q - P_0)) = (Comp(\vec{n}, (Q - P_0))$$

3 Ángulo e intersección de planos

3.1 Definición:

Dos planos son paralelos si sus vectores normales son paralelos.

Teorema

Tres puntos NO colineales deetrminan un punto único.

Demostración.

Sean p_1, p_2, p_3 tres puntos no colineales, es decir, que no de encuentran en la misma recta.

En tal caso $(P_2 - P_1)$ y $(P_3 - P_1)$ son linealmente independientes

y pueden fungir como vectores directores del plano \mathcal{P}

En tal caso $(P_2 - P_1)$ y $(P_3 - P_1)$

$$\mathcal{P} = \{P | P = P_1 + u(P_2 - P_1) + v(P_3 - P_1), u, v \in \mathbb{R}\}$$

Esto es, P_2, P_1 y P_3 estan en \mathcal{P} y además

$$\vec{n} = (P_2 - P_1) \times (P_3 - P_1)$$

es la norma de dicho plano.

Por el Teorema reciente, el plano es único.

3.2 Teorema.

Si \mathcal{P}_1 y \mathcal{P}_2 son planos paralelos, enetonces $\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2 = \emptyset$

o bien $\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2$ es una recta.

Si \mathcal{P}_1 y \mathcal{P}_2 son NO paralelos, entonces

$\mathcal{P}_1 \frown \mathcal{P}_2$ es una recta.

Demostración.

3.2.1 Caso 1:

$\mathcal{P}_1 \parallel \mathcal{P}_2$

Sean $\mathcal{P}_1 = \left\{ P \mid P = P_1 + u\vec{a} + v\vec{b}, u, v \in \mathbb{R} \right\}$

y $\mathcal{P}_2 = \{ \vec{n} \cdot (P - P_2) = 0 \}$

Si $P \in \mathcal{P}$, $P = P_1 + u\vec{a} + v\vec{b}$, $u, v \in \mathbb{R}$

y si además $p \in \mathcal{P}_2$ entonces

$$\vec{n} \cdot [(P_1 + u\vec{a} + v\vec{b}) - P_2] = 0$$

$$\vec{n} \cdot P_1 + u\vec{n} \cdot \vec{a} + v\vec{n} \cdot \vec{b} - \vec{n} \cdot P_2 = 0$$

$$u\vec{n} \cdot \vec{a} + v\vec{n} \cdot \vec{b} = \vec{n} \cdot (P - P_2) \dots (1)$$

Si en (1), $\vec{n} \cdot (P - P_2) \neq 0$,

entonces No existen valores $u, v \in \mathbb{R}$ que satisfagan la expresión, por lo que

$$\mathcal{P}_1 \frown \mathcal{P}_2 = \emptyset$$

Si en cambio $\vec{n} \cdot (P - P_2) = 0$, entonces cuales quiera valores de $u, v \in \mathbb{R}$ satisfacen (1)

entonces, $\mathcal{P}_1 \subset \mathcal{P}_2$

por el Teorema anterior, $\mathcal{P}_1 = \mathcal{P}_2$

dado que tres puntos no colineales definen al punto (P, P_1, P_2)

3.2.2 Caso 2:

$\mathcal{P}_1 \nparallel \mathcal{P}_2$

Si \mathcal{P}_1 y \mathcal{P}_2 fueran NO paralelas

entonces, $\vec{n} \cdot \vec{a}$ o $\vec{n} \cdot \vec{b}$ serían distintos de cero.

Supongamos que $\vec{n} \cdot \vec{a} \neq 0$

Entonces, $u = \frac{\vec{n} \cdot (P_2 - P_1) - v\vec{n} \cdot \vec{b}}{\vec{n} \cdot \vec{a}}$

De manera que al sustituir u en la ecuación \mathcal{P}_1 se obtiene la intersección:

$$\mathcal{P}_1 \frown \mathcal{P}_2 = \left\{ P \mid P = P_1 + \frac{\vec{n} \cdot (P_2 - P_1) - v\vec{n} \cdot \vec{b}}{\vec{n} \cdot \vec{a}} \vec{a} + v\vec{b}, v \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\mathcal{P}_1 \frown \mathcal{P}_2 = \left\{ P \mid P = P_1 + \frac{\vec{n} \cdot (P_2 - P_1)}{\vec{n} \cdot \vec{a}} \vec{a} + \vec{b} - \frac{v\vec{n} \cdot \vec{b}}{\vec{n} \cdot \vec{a}} \vec{a} + v\vec{b}, v \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\mathcal{P}_1 \frown \mathcal{P}_2 = \left\{ P \mid P = P_1 + \frac{\vec{n} \cdot (P_2 - P_1)}{\vec{n} \cdot \vec{a}} \vec{a} + v \left(\vec{b} - \frac{\vec{n} \cdot \vec{b}}{\vec{n} \cdot \vec{a}} \vec{a} \right), v \in \mathbb{R} \right\}$$

Para que este conjunto sea una recta es preciso que $\vec{b} - \frac{\vec{n} \cdot \vec{b}}{\vec{n} \cdot \vec{a}} \vec{a}$ sea NO nulo.

Supongamos que este vector si lo es:

$$\vec{b} - \frac{\vec{n} \cdot \vec{b}}{\vec{n} \cdot \vec{a}} \vec{a} = \vec{0}$$

$$\implies \vec{b} - \frac{\vec{n} \cdot \vec{b}}{\vec{n} \cdot \vec{a}} \vec{a} = r \cdot \vec{a} \text{ para algún } r_0 \in \mathbb{R}$$

Pero esto no puede ocurrir porque \vec{a} y \vec{b} son los vectores directores de \mathcal{P}_1 y por definición,

son linealmente independientes, es decir, No paralelos.